TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 1

EL NÚMERO NATURAL. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

TEMA 1

EL NÚMERO NATURAL. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

1. INTRODUCCIÓN.

Los números naturales aparecen debido a la necesidad que tiene el hombre de contar. Un número cualquiera como el "5" es una abstracción, es una determinada propiedad de algunos conjuntos.

Podemos construir los números naturales de dos maneras:

a) Desde el punto de vista axiomático.
b) De manera constructiva, con ayuda de la Teoría de Conjuntos.

2. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$.

2.1. Definición Axiomática.

Construimos $\mathbb{N}$ con un número infinito de elementos, todos ellos distintos, llamados números naturales.

$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, 4,\dots\}$

Cada uno de los símbolos anteriores, excepto el que figura en primer lugar, es el siguiente de aquel que le precede.

Se verifican los siguientes axiomas, llamados *postulados de Peano:*

Axioma 1: $0\in\mathbb{N}$

Axioma 2: A cada número $a\in\mathbb{N}$ se le asigna un siguiente $s(a)=a^*$ que también es natural y se verifica:

$$\forall a;\ a\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists S(a)\in\mathbb{N}\ /\ \forall a;\ a\in\mathbb{N} \wedge \forall b;\ b\in\mathbb{N},\ \text{si } a=b \Rightarrow S(a)=S(b)$$

Axioma 3: No existe ningún natural cuyo siguiente sea el 0.

$$\forall a;\ a\in\mathbb{N} \Rightarrow S(a)\neq 0$$

Axioma 4: $\forall a, b\in\mathbb{N}\quad S(a)=S(b) \Rightarrow a=b$

Axioma 5 (de inducción matemática o inducción completa):

$$\forall K,\ K\subset\mathbb{N}\ /\ 0\in K \text{ y } \forall a,\ a\in K \Rightarrow S(a)\in K \Rightarrow K=\mathbb{N}$$

También es posible establecer el uno "1" como primer número natural, siendo la construcción la misma.

PROPIEDADES

1) $\forall a, b \in \mathbb{N}$, si $a \neq b \Rightarrow a^* \neq b^*$ (axioma 4)

2) $\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \neq a^*$ (axioma 5)

Construimos $K=\{a \,/\, a \in \mathbb{N}$ y $a \neq a^*\}$

Veamos que $K \subset \mathbb{N}$. Por el axioma 3: $0 \in K$.

Supongamos que $a \in K \Rightarrow a^* \neq (a^*)^* \Rightarrow a^* \in K \Rightarrow K \in \mathbb{N}$

3) $\forall a \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} \,/\, a=b^*$

Construimos $K=\{0\} \cup \{a \in \mathbb{N}; \exists b \in \mathbb{N} \cap a=b^*\}$

$K \neq 0$, ya que $0 \in K$. Supongamos $a \in K$, como K contiene todos los siguientes, $a^* \in K \Rightarrow K=\mathbb{N}$

2.2. Forma Constructiva.

DEF Si K es un conjunto, llamamos siguiente de K al conjunto $K^*=K \cup \{K\}$

A partir de este momento designaremos al conjunto $\varnothing$ por el símbolo 0.

$\varnothing = 0$
$0^* = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$
$1^* = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = 2$
$2^* = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = 3$
…

Hemos de asegurarnos de que este proceso puede continuar de forma indefinida y que llegamos a obtener un determinado conjunto "infinito". Para ello necesitamos el Axioma del Infinito.

AXIOMA DEL INFINITO

Existe al menos un conjunto K_0 que cumple:

a) $0 \in K_0$
b) $a \in K_0 \Rightarrow a^* \in K_0$

(Decimos que K_0 es recurrente)

Sea ahora $\mathcal{K}$ la familia de todos los conjuntos que verifican el axioma anterior (conjuntos recurrentes) y llamamos $\mathbb{N}=\cap K$ con $K \in \mathcal{K}$.

$\mathbb{N}$ es no vacío, ya que al menos existe un conjunto recurrente.
$\mathbb{N}$ es recurrente (es trivial su comprobación).

$\mathbb{N}$ es el conjunto recurrente más pequeño, ya que si K es un conjunto recurrente, por definición de $\mathbb{N}$ se tiene que verificar que $N\subset K$.

El conjunto $\mathbb{N}$ definido anteriormente verifica los axiomas de Peano vistos anteriormente.

Por la construcción de $\mathbb{N}$, los axiomas 1, 2 y 5 son evidentes.

El axioma 3 se verifica si tenemos en cuenta que $n^*=n\cup\{n\}=\varnothing$, entonces $\{n\}=\varnothing$ y de aquí $n\in\varnothing$, lo que no tiene sentido.

Para poder comprobar el axioma 4 necesitamos de unos resultados previos:

DEF Un conjunto K es Transitivo $\Leftrightarrow \forall a\ (a\in K \Rightarrow a\subset K)$

LEMA Todo número natural es transitivo

dem.

Vamos a realizar la demostración por inducción.

Llamamos $C=\{n\in \mathbb{N} \ / \ n \text{ es transitivo}\}$

1) $0\in C$, porque 0 es vacío y se cumple la condición por vacuidad.
2) Supongamos que $n\in C$, entonces

$$m\in n^* \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m\in n \Rightarrow m\subset n\subset n^* \Rightarrow m\subset n^* \\ \\ m=n \Rightarrow m=n\subset n^* \Rightarrow m\subset n^* \end{array} \right\} \qquad n^*\in C \Rightarrow C=\mathbb{N} \qquad \text{c.q.d.}$$

Podemos Probar ya el Axioma 4.

Supongamos $m^*=n^*$ y supongamos $m\neq n$

Entonces $m\in m^*=n^*=n\cup\{n\}$, lo que implica $m\in n$ pues $m\neq n$ y también $n\in n^*=m^*=m\cup\{m\}$, lo que implica $n\in m$

Se tiene $m\in n$ y $n\in m$ y como ambos son transitivos se verifica que $n\subset m$ y $m\subset n$ y por tanto $m=n$, lo cual es una contradicción.

3. ADICIÓN DE NUMEROS NATURALES.

3.1. Definición.

Sea $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que $\forall(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $f(x,y)\in\mathbb{N}$ verificando:

1) $f(x,0)=x, \ \forall x\in\mathbb{N}$
2) $f(x,y^*)=[(f(x,y)^*] \ \ \forall x,y\in\mathbb{N}$

Esta aplicación existe y es única.

dem.

1) Existencia

Sea $M=\{x\in \mathbb{N} \mid \exists f_x:\{x\}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, verificando $f_x(x,0)=x$, $f_x(x,y^*)=[f_x(x,y)]^*$, $\forall y\in \mathbb{N}\}$

$0\in M$, ya que $f_0:\{0\}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \mid f_0(0,y)=y$, $\forall y\in \mathbb{N}$.

$$f_0(0,0)=0,\quad f_0(0,y^*)=y^*=(f_0(0,y))^*,\quad \forall y\in \mathbb{N}$$

Supongamos que $x\in M$, ¿$x^*\in M$?

$$f_{x^*}:\{x^*\}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \mid f_{x^*}(x^*,0)=x^*,\ f_{x^*}(x^*,y^*)=[f_{x^*}(x^*,y)]^*$$

Esta f_{x^*} será $f_{x^*}(x^*,y)=[f_x(x,y)]^* \Rightarrow x^*\in M$, por tanto $M=\mathbb{N}$

Como esto se verifica $\forall x\in \mathbb{N}$, podemos garantizar que $\exists f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$

2) Unicidad

Supongamos $M_x=\{y\in \mathbb{N} \mid f(x,y)=g(x,y)\}$, $x\in \mathbb{N}$ con f y g satisfaciendo las condiciones 1) y 2).

¿$0\in M_x$?, $f(x,0)=g(x,0)=x$

Si $y\in M_x$, ¿$y^*\in M_x$?

$f(x,y^*)=[f(x,y)]^*=[g(x,y)]^*=g(x,y^*) \Rightarrow y^*\in M_x$

Luego $M_x=\mathbb{N}$, y como esto es $\forall x\in \mathbb{N} \Rightarrow f=g$

Por tanto, $\forall(x,y)\in \mathbb{N}$ podemos obtener $f(x,y)$. A esta aplicación se le conoce con el nombre de *adicción de números naturales*. Se simboliza por "+".

Definición axiomática:

La aplicación suma de números naturales es una aplicación $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que $\forall(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ existe un único número, llamado $x+y=+(x,y)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ +(x,0)=x+0=x \\ 2)\ \ +(x,y^*)=x+y^*=(x+y)^* \end{array}\right\} \quad \forall x,y\in \mathbb{N}$$

Se Verifica:

1) $\forall x\in \mathbb{N}$, $x+1=x^*$

2) $x+y=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$

3.2. Propiedades.

3.2.1. Asociativa.

$\forall a,b,c\in \mathbb{N}$, se tiene :$(a+b)+c=a+(b+c)$

Para la demostración definiremos un conjunto M formado por todos los números naturales que verifican la propiedad. Comprobaremos que $M=\mathbb{N}$

Sea $M=\{x\in \mathbb{N} \ / \ (a+b)+x=a+(b+x) \ \ \forall a,b\in \mathbb{N}\}$

$0\in M$, ya que $(a+b)+0=a+b=a+(b+0)$

Supongamos que $x\in M \Rightarrow (a+b)+x^*=((a+b)+x)^*=(a+(b+x))^*=a+(b+x^*)$

Luego $x^*\in M \Rightarrow M=\mathbb{N}$

3.2.2. Existencia de Elemento Neutro.

$\exists 0\in \mathbb{N} \ / \ \forall x\in \mathbb{N} \Rightarrow x+0=0+x=x$

Sea el conjunto $M=\{x\in \mathbb{N} \ / \ x+0=0+x\}$

$0\in M$, trivialmente.

si $x\in M \Rightarrow$ Comprobemos que $x^*\in M$

$x^*+0=x^*=(x+0)^*=(0+x)^*=0+x^* \Rightarrow x^*\in M$ y por tanto $M=\mathbb{N}$

3.2.3. Conmutativa.

$\forall a,b\in \mathbb{N}$ se verifica: $a+b=b+a$

Sea el conjunto $A=\{x \ / \ x\in \mathbb{N},\ x+1=1+x\}$

$0\in A$, trivialmente.

si $z\in A \Rightarrow z^*+1=(z+1)+1=(1+z)+1=1+(z+1)=1+z^* \Rightarrow A=\mathbb{N}$

Sea el conjunto $B==\{x \ / \ x\in \mathbb{N},\ x+a=a+x\}$

$0\in B$, ya que 0 es el elemento neutro.

Comprobemos que $z^*\in B$

$a+z^*=a+(z+1)=(a+z)+1=(a+z)^*=(z+a)^*=(z+a)+1=z+(a+1)=z+(1+a)=$

$=(z+1)+a=z^*+a \quad \Rightarrow \quad B=\mathbb{N}$

Con estas tres propiedades tenemos que ***(ℕ,+) es semigrupo aditivo de los números naturales.***

Para ser un grupo le falta tener la propiedad de Elemento Opuesto.

4. PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES.

4.1. Definición.

Sea $f:\mathbb{N}x\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ / $\forall(x,y)\in\mathbb{N}x\mathbb{N}$, $f(x,y)\in\mathbb{N}$, verificando:

a) $f(x,0)=0$, $\forall x\in\mathbb{N}$
b) $f(x,y^*)=f(x,y)+x$, $\forall x,y\in\mathbb{N}$

Esta aplicación existe y es única.

dem.

1) Existencia.

Sea $M=\{x\in\mathbb{N} / \exists f_x:\{x\}x\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, verificando $f_x(x,0)=0$, $f_x(x,y^*)=f_x(x,y)+x$, $\forall y\in\mathbb{N}\}$

$0\in M$, pues si definimos f_x como la aplicación nula f_0, verifica las condiciones.

Supongamos que $x\in M$ y vamos a comprobar que $x^*\in M$

$f_{x^*}:\{x^*\}x\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ / $f_{x^*}(x^*,0)=0$, $f_{x^*}(x^*,y^*)=f_{x^*}(x^*,y)+x^*$

Esta f_{x^*} será $f_{x^*}(x^*,y)=f_x(x,y)+y$; Así definida veamos que cumple las dos condiciones para pertenecer a M

1) $f_{x^*}(x^*,0)=f_x(x,0)+0=f_x(x,0)=0$
2) $f_{x^*}(x^*,y^*)=f_x(x,y^*)+y^*= \quad f_x(x,y)+x+y^*= \quad f_x(x,y)+x+(y+1)= f_x(x,y)+(x+1)+y= f_x(x,y)+x^*+y= f_x(x,y)+y+x^*= f_{x^*}(x^*,y)+x^*$

Por tanto $x^*\in M$ lo cual implica que $M=\mathbb{N}$

2) Unicidad.

Supongamos que existen f y g dos funciones verificando las dos condiciones del producto.

Sea $M=\{y\in\mathbb{N} / f_x(x,y)=g_x(x,y)\ \forall x\in\mathbb{N}\}$ Comprobemos que $M=\mathbb{N}$

$0\in M$ ya que $f_x(x,0)=0=g_x(x,0)\ \forall x\in\mathbb{N}$

Supongamos que $y\in M$ y veamos que $y^*\in M$

$f_x(x,y^*)=f_x(x,y)+x=g_x(x,y)+x=g_x(x,y^*)$

Por tanto $M=\mathbb{N}$ lo cual significa que $f=g$

Se simboliza por "·"

Definición Axiomática de multiplicación de números naturales:

A cada par x e y se le asocia uno y sólo un número natural, que designaremos por $x \cdot y = \cdot(x,y)$ y que se llama producto de x por y, y verifica:

a) $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$
b) $x \cdot y^* = x \cdot y + x, \quad \forall x,y \in \mathbb{N}$

Se verifica que $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

4.2. Propiedades.

4.2.1. Distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \text{Distributiva por la derecha} & (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \\ \text{Distributiva por la izquierda} & c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b \end{cases}$$

Para la demostración definiremos un conjunto M formado por todos los numeros naturales que verifican la propiedad. Comprobaremos que $M = \mathbb{N}$

Sea el conjunto $M = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x\}$

$0 \in M$ ya que $(a+b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$

Supongamos que $z \in M$, comprobemos que $z^* \in M$

$$(a+b) \cdot z^* = (a+b)z + (a+b) = a \cdot z + b \cdot z + a + b = a \cdot z + a + b \cdot z + b = a \cdot z^* + b \cdot z^*$$

Por tanto $M = \mathbb{N}$ (análogamente por la izquierda).

4.2.2. Existencia de Elemento Absorbente en $(\mathbb{N}, \cdot)$

El cero "0" es el elemento absorbente de $(\mathbb{N}, \cdot)$ pues

$\forall b \in \mathbb{N}$ se verifica $b \cdot 0 = 0 = 0 \cdot b$

$a \cdot b + 0 = a \cdot b = (a+0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b \Rightarrow 0 \cdot b = 0$ Como $b \cdot 0 = 0 \Rightarrow b \cdot 0 = 0 \cdot b$

Una demostración alternativa puede ser:

$b \cdot 0 = b \cdot (0+0) = b \cdot 0 + b \cdot 0 \Rightarrow b \cdot 0 = 0$

Análogamente para $0 \cdot b = 0$

4.2.3. Existencia de Elemento Neutro en $(\mathbb{N}, \cdot)$.

El uno "1" es el elemento neutro ya que verifica $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

Para comprobarlo definimos $M = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \cdot x = x\}$

$0 \in M$, ya que es el elemento neutro: $1 \cdot 0=0$

Supongamos que $z \in M$ y comprobemos que $z^* \in M$

$$1 \cdot z^*=1 \cdot (z+1)=1 \cdot z+1=z \cdot 1+1=z+1=z^*$$

Por tanto $z^* \in M \Rightarrow M=\mathbb{N}$

4.2.4. Conmutativa.

$a \cdot b=b \cdot a \ \forall a,b \in \mathbb{N}$

Sea $M=\{x \in \mathbb{N} \ / \ a \cdot x=x \cdot a \ \forall a \in \mathbb{N}\}$

$0 \in M$, trivialmente.

Supongamos que $z \in M$

$$a \cdot z^*=a \cdot (z+1)=a \cdot z+a=a+a \cdot z=a+z \cdot a=(1+z) \cdot a=z^* \cdot a$$

Entonces $M=\mathbb{N}$

4.2.5. Asociativa.

$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c) \ \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

Sea $M=\{x \in \mathbb{N} \ / \ (a \cdot b) \cdot x=a \cdot (b \cdot x)\}$

Como $(ab) \cdot 0=0= a \cdot (b \cdot 0)=a \cdot 0 \Rightarrow 0 \in M$

Supongamos que $x \in M$. Veamos que $x^* \in M$

$$(ab) \cdot x^*=(ab)(x+1)=(ab) \cdot x+ab=a(bx)+ab=a(bx+b)=a(b(x+1))=a(bx^*)$$

Entonces $x^* \in M$

Por lo tanto $M=\mathbb{N}$

Teniendo en cuenta las propiedades de la adición y la multiplicación de números naturales, podemos decir que *($\mathbb{N}$,+,·) es un semianillo conmutativo con elemento unidad.*

4.3. Conclusiones.

1) En $(\mathbb{N}, \cdot)$ no existen divisores de cero.

   $m \neq 0$ y $n \neq 0 \Rightarrow m \cdot n \neq 0$

2) Ley de Simplificación.

a) Si $a+b=a+c \Rightarrow b=c\ \forall a\in \mathbb{N}$
b) Si $a\cdot b=a\cdot c \Rightarrow b=c\ \forall a\in \mathbb{N}-\{0\}$

3) Ley de Monotonía

a) Si $a=b \Rightarrow a+c=b+c\ \forall c\in \mathbb{N}$
b) Si $a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c \quad \forall c\in \mathbb{N}$

5. ORDEN EN $\mathbb{N}$.

DEF Dados los números naturales a y b, se dice que *a es menor que b* y se escribe $a<b$, si y sólo si existe un número natural c (con $c\neq 0$), tal que $a+c=b$

$$a<b \Leftrightarrow \exists c\in \mathbb{N}-\{0\} \;/\; a+c=b$$

La relación así definida es una relación de orden estricto (verifica las propiedades antirreflexiva, antisimétrica y transitiva).

Es Antirreflexiva porque dado $a\in \mathbb{N}$, no $\exists c\in \mathbb{N}-\{0\} \;/\; a+c=a$
Es Antisimétrica: $a<b$ y $b<a$ son mutuamente excluyentes.
Es transitiva: Si $a<b$ y $b<c \Rightarrow \exists d,e\in \mathbb{N} \;/\; a+d=b$ y $b+e=c \Rightarrow (a+d)+e=c \Rightarrow a+(d+e)=c$ y como $(d+e)\in \mathbb{N} \Rightarrow a<c$

PROPIEDADES

1) $\forall n\in \mathbb{N},\ n\neq 0 \Rightarrow 0<n$
2) $\forall m,n\in \mathbb{N}$, se cumple sólo una de las siguientes relaciones: $m=n$, $m<n$, $n<m$

$\mathbb{N}$ es un conjunto estrictamente ordenado por la relación $<$

DEF Dados $a,b\in \mathbb{N}$, se dice que *a es menor o igual que b*, $a\leq b$, si $a<b$ ó $a=b$

$$a\leq b \Leftrightarrow a<b \text{ o } a=b$$

Teniendo en cuenta esta definición y la anterior, podríamos decir que:

$$a\leq b \Leftrightarrow \exists c\in \mathbb{N} \;/\; a+c=b$$

Nótese que ahora “c” puede tomar el valor “0”.

$\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$ (verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva) y todos los números en el conjunto $\mathbb{N}$ son comparables.

PROP $\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$. Todos los números en el conjunto $\mathbb{N}$ son comparables.

dem.

Para comprobar que es una relación de orden hemos de comprobar que se verifican las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1) Reflexiva: $a \leq a$ ya que $a+0=a$ $\forall a \in \mathbb{N}$.

2) Antisimétrica:
   Como $a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}$ / $a+c=b$
   Como $b \leq a \Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}$ / $b+d=a$
   Entonces $a+c+d=a$ y por tanto $c+d=0$ lo que significa que $c=d=0$ y por tanto $a=b$

3) Transitiva:
   Como $a \leq b \Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}$ / $a+d=b$
   Como $b \leq c \Rightarrow \exists e \in \mathbb{N}$ / $b+e=c$

   De ambas expresiones obtenemos $a+(d+e)=c$
   Y como $d+e \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq c$

6. OTRAS PROPIEDADES DE $\mathbb{N}$.

PROP El conjunto $\mathbb{N}$ con la relacion $\leq$ está bien ordenado. Es decir, todo subconjunto C de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo (Se entiende por elemento mínimo $m \in C$ / $m \leq c$ $\forall c \in C$).

dem.

Tenemos $C \subset \mathbb{N}$ con $C \neq \emptyset$.

Podemos encontrarnos dos situaciones:

1) $0 \in C$. En este caso $0=\min C$
2) $0 \notin C$
   Sea el conjunto $A=\{x \in \mathbb{N} \ / \ x<c \ \forall c \in C\}$

   Veamos que $A \cap C = \emptyset$

   $$\forall x \in A \text{ y } \forall c \in C \ \exists d>0 \ / \ x+d=c \Rightarrow x \neq c \ \forall c \in C \Rightarrow x \notin C \Rightarrow A \cap C = \emptyset$$

   Luego $A \neq \mathbb{N}$

   $0 \in A$, por tanto A es no recurrente

   Debe existir $a_0 \in A$ / $a_0^* \notin A$

   Como $a_0<c$ $\forall c \in C$ (por definición de A) sería $a_0^* \leq c$ $\forall c \in C$

   Y como no puede suceder que $a_0^*<c$ $\forall c \in C$ (si sucede tendríamos que $a_0^* \in A$) $\exists c_0 \in C$ / $c_0=a_0^*=\min C$

OBS La relación de orden es compatible con las operaciones suma y producto definidas anteriormente:

1) $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c \quad \forall c \in \mathbb{N}$
2) $a \le b \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{N}$

TEOREMA DEL EXTREMO

Toda parte A de $\mathbb{N}$ no vacía y acotada superiormente tiene elemento mínimo.

dem.

Sea S el conjunto formado por las cotas superiores de A.

Teniendo en cuenta la propiedad anterior,

$\exists s_0 \in S \;/\; s_0 = \min S$

Si $s_0=0 \Rightarrow A=\{0\}$ y $0=\max A$

Si $s_0 \neq 0 \Rightarrow s_0=\max A$ ya que el anterior, r_0, a s_0 no sería cota superior, lo que significa que $\exists a_0 \in A \;/\; r_0 < a_0 \Rightarrow r_0^* = s_0 \le a_0$ y por tanto $s_0 \in A$

7. CONJUNTOS FINITOS.

DEF Dado $n \in \mathbb{N}$ se llama sección S(n) al conjunto $S(n)=\{m \in \mathbb{N} \;/\; m<n\}$

DEF A es un conjunto finito si puede ponerse en correspondencia biyectiva con alguna sección S(n). Diremos que n=Card(A)

PROP $\mathbb{N}$ es no finito.

dem.

Vamos a realizar la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito.

$\exists n \in \mathbb{N}$ / S(n) y $\mathbb{N}$ se pueden poner en correspondencia biyectiva.

Sea $\varphi: S(n) \to \mathbb{N}$ biyectiva.

Si $\varphi(m)=a$ (siendo $m^*=n$), obtendríamos una biyección θ entre S(m) y $\mathbb{N}-\{a\}$, pero también podríamos poner $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}-\{a\}$ en correspondencia biyectiva, por ejemplo con $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}-\{a\}$ donde $y(j)=\begin{cases} j & si\ j<a \\ j+1 & si\ a \le j \end{cases}$

Componiendo θ y ψ obtenemos una biyección entre S(m) y S(n) lo que es una contradicción (recordemos que $m \neq n$).

8. DIVISIÓN EUCLÍDEA.

PROP Dados D,d∈ℕ con d≠0, existen c,r∈ℕ únicos verificando D=d·c+r con r<d.

dem.

Si D=0 la demostración es inmediata.

Supongamos que D≠0

- Existencia

  El conjunto A={x∈ℕ / d·x≤D} es no vacío y está, trivialmente, acotado superiormente. Por tanto ∃c=max A.

  Para ese valor c se verifica:
  d·c≤D y D<d·(c+1), luego ∃r∈ℕ / D=d·c+r siendo r<d

- Unicidad

  Supongamos que D=d·c+r=d·c'+r' y r≤r'

  Entonces ∃h∈ℕ / r+h=r'

  Sustituyendo d·c+r=d·c'+r+h ⇒ d·c' ≤ d·c ⇒ ∃m∈ℕ / c'+m=c

  Sustituyendo d·m=h ⇒ m=h=0 ya que si no se tendría r+d·m=r'>d, en contradicción con la hipótesis.

9. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

Tenemos la necesidad de buscar un conjunto de palabras, símbolos y reglas que nos permitan la utilización de los números naturales con precisión y comodidad, ya que este conjunto es infinito.

Llamamos Sistemas de Numeración al conjunto de reglas y convenios que utilizamos para nombrar y escribir los números, empleando la menor cantidad posible de palabras y símbolos.

Los símbolos se llaman cifras o dígitos del sistema, y el cardinal del conjunto de símbolos utilizados recibe el nombre de base del sistema.

El sistema de numeración más usado es el decimal, que se caracteriza por:

a) Utilizar diez cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9
b) Tener de base el nº 10, es decir, 10 unidades de un orden determinado determinan una unidad de orden inmediato superior.
c) Se basa en el principio del valor relativo. El valor relativo de una cifra viene dado por el lugar que ocupa la cifra (unidades, decenas, centenas,…)

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA NUMERACIÓN.

Sea $b\in\mathbb{N}$ con $b>1$. Entonces todo $n\in\mathbb{N}$ se puede expresar de forma única como

$$n=n_0+n_1b+n_2b^2+n_3b^3+\ldots+n_pb^p$$

con $n_0, n_1, n_2,\ldots,n_p\in\mathbb{N}$, $n_p\neq 0$ y $n_i<b\ \forall i:1,..,p$

dem.

- Existencia (de la expresión).

Si $n<b \Rightarrow n=n\cdot b^0$ y hemos terminado.

Supongamos que $n\geq b$.

Efectuamos la división euclídea de n por b obteniendo

$n=b\cdot c_1+n_0$ con $0<c_1<n$ y $0\leq n_0<b$

Si $c_1<b$ la expresión buscada sería $n=n_0+c_1\cdot b$

Si $c_1\geq b$ realizamos la división euclídea de c_1 por b
$c_1=b\cdot c_2+n_1$ con $0<c_2<c_1$ y $0\leq n_1<b$

Si $c_2<b$ la expresión buscada sería $n=b\cdot[b\cdot c_2+n_1]+n_0=c_2\cdot b^2+n_1\cdot b+n_0$

Si $c_2\geq b$ se repite el proceso anterior

Repitiendo el proceso p veces hasta llegar a que $c_p<b$ obtendríamos la expresión para n buscada sin más que llamar $n_p=c_p$

- Unicidad (de la expresión)

Veamos ahora que la expresión obtenida para n es única. Vamos a suponer que existe otra: $n=n_0'+n_1'b+n_2'b_2+n_3'b^3+\ldots+n_r'b^r$ donde no tiene por qué r=p

Escribiendo $n=n_0'+b(n_1'+n_2'b+n_3'b^2+\ldots+n_r'b^{r-1})$

Tenemos que n_0' es el resto que se obtiene al dividir n por b

Pero como la división euclídea nos da valores únicos, resulta que $n_0'=n_0$

Repitiendo el proceso con $n_1'+n_2'b+n_3'b^2+\ldots+n_r'b^{r-1}$ como dividendo y b como divisor obtenemos que $n_1'=n_1$.

Iterando, llegamos a poder afirmas que r=p y $n_i'=n_i$ $\forall i:1,\ldots,p$. Luego ambas expresiones de n son la misma y por tanto es única.

Notación Por convenio, escribimos el número n como $n=n_pn_{p-1}\ldots n_2n_1n_0$ teniendo en cuenta que cada una de las cifras o dígitos representa un conjunto de unidades del orden indicado por el lugar que ocupa.

PROP Sea $n=n_p n_{p-1}\dots n_2 n_1 n_0$ un número escrito en base b. Si multiplicamos el número n por una potencia cualquiera de la base, entonces

$$n\cdot b^k = n_p n_{p-1}\dots n_2 n_1 n_0 00\dots 0 \quad \text{con k ceros}$$

dem.

Como $n=n_p n_{p-1}\dots n_2 n_1 n_0$, escribiendolo de forma polinómica tenemos $n=n_0+n_1 b+n_2 b^2+n_3 b^3+\dots+n_p b^p$

Si multiplicamos los dos miembros de la expresión por b^k queda: $nb^k=n_0 b^k+n_1 b^{k+1}+n_2 b^{k+2}+n_3 b^{k+3}+\dots+n_p b^{k+p}$

y completando el polinomio:

$$nb^k=0+0b+0b^2+\dots+0b^{k-1}+n_0 b^k+n_1 b^{k+1}+n_2 b^{k+2}+n_3 b^{k+3}+\dots+n_p b^{k+p}$$

volviendo a escribir n según el convenio establecido, obtenemos la expresión buscada.

PROP n en base b tiene p+1 cifras $\Leftrightarrow b^p \leq n < b^{p+1}$

dem.

"$\Rightarrow$"

Escribiendo n en forma polinómica tenemos

$$n=n_0+n_1 b+n_2 b^2+n_3 b^3+\dots+n_p b^p$$

Como $n_p \neq 0 \Rightarrow b^p \leq n_p b^p \leq n \Rightarrow b^p \leq n$

Sabemos que $n_0<b \Rightarrow n_0+n_1 b < b+n_1 b=b(1+n_1)$

Como $n_1<b \Rightarrow n_1+1 \leq b \Rightarrow b(1+n_1)\leq b^2$

De ambas expresiones obtenemos $n_0+n_1 b<b^2$

Reiterando el proceso llegamos a que $n_0+n_1 b+n_2 b^2+n_3 b^3+\dots+n_p b^p<b^{p+1}$ o lo que es lo mismo $n<b^{p+1}$

"$\Leftarrow$"

Supongamos que n en base b no tiene p+1 cifras.

Si n tiene p cifras, aplicando la condición necesaria tendríamos que $b^{p-1}\leq n<b^p$ lo que no es cierto según la hipótesis.

Si n tiene p+2 cifras, tendríamos $b^{p+1}\leq n<b^{p+2}$ igualmente contrario a la hipótesis.

Luego n debe tener p+1 cifras.

PROP Sean n y n' dos números en base b que tienen p y p' cifras respectivamente. Entonces $p'<p \Rightarrow n'<n$

dem.

Si $p'<p \Rightarrow p'\leq p-1$

Según la propiedad anterior: $b^{p-1}\leq n<b^p$
$b^{p'-1}\leq n<b^{p'} \Rightarrow n'<b^{p'}\leq b^{p-1}$

De ambas expresiones tenemos $n'<b^{p-1}\leq n<b^p$ luego $n'<n$

PROP Si n y n' tienen el mismo número de cifras y están escritos en la misma base b. Entonces n'<n si y solo si la primera cifra de n' distinta de la correspondiente de n es menor que ésta.

dem.

"$\Rightarrow$"

Es evidente, ya que si n'<n y tienen el mismo número de cifras, existirá una en el número n que sea mayor que la que ocupa el mismo lugar en el número n'.

"$\Leftarrow$"

Sean $n=n_0+n_1b+n_2b^2+n_3b^3+\ldots+n_pb^p$
$n'=n_0'+n_1'b+n_2'b_2+n_3'b^3+\ldots+n_p'b^p$

Supongamos que $n_k=n_k'$ $\forall k:i+1,\ldots,p$

Eso significa que la primera cifra diferente son n_i y n_i' y que se verifica $n_i'<n_i$

Entonces $n_i'+1\leq n_i$

Tomando ahora los polinomios parciales obtenidos de los anteriores donde hemos eliminado las primeras cifras iguales:

$n^*= n_0+n_1b+n_2b^2+n_3b^3+\ldots+n_ib^i \geq n_ib^i \geq (n_i'+1)b^i = n_i'b^i+b^i >$
$> n_0'+n_1'b+n_2'b_2+n_3'b^3+\ldots+n_i'b^i = n'^*$

Por tanto $n>n'$

9.1. Cambio de Sistemas de Numeración.

a) Dado un número en una base cualquiera b, hallar su expresión en base decimal.

Sea $n=n_pn_{p-1}\ldots n_2n_1n_0$ en base b.

Escrito en forma polinómica tenemos: $n=n_0+n_1b+n_2b^2+n_3b^3+\ldots+n_pb^p$

Efectuando las operaciones indicadas en la expresión de n obtenemos el número decimal equivalente.

También podemos calcular el valor del polinomio con sólo obtener el resto de la división del polinomio por la base, utilizando para ello la regla de Ruffini.

b) Dado un número en base 10, hallar su expresión en una base cualquiera b.

Dado el número n en base 10, consiste en calcular los coeficientes del polinomio $n=n_0+n_1b+n_2b^2+n_3b^3+\ldots+n_pb^p$

Basta dividir el número sucesivamente hasta conseguir un cociente que sea menor que b. El número en base b estará formado por el último cociente y la sucesión de restos obtenida en orden inverso.

c) Dado un número n en base b, hallar su expresión en otra base b'.

Este cambio se realiza pasando el número n en base b a base decimal y luego de base decimal a base b'.

9.2. Operaciones básicas entre números en una base cualquiera.

a) Suma.

En un sistema de base b, para sumar dos números se procede de forma análoga a como se hace en el sistema decimal.

En cualquier base se usan las mismas reglas ya establecidas para el sistema decimal.

b) Producto.

Las reglas de la multiplicación en una base cualquiera son análogas a las del sistema decimal. Es necesario saber las tablas de multiplicar para los números menores que la base.

9.3. Sistemas de Numeración más utilizados.

El sistema binario (base 2) es el más utilizado como lenguaje interno de los ordenadores (código máquina). Los símbolos que utiliza son 0 y 1.

Debido a la cantidad de dígitos que se requieren para representar en binario la información en un ordenador, se recurre a usar los sistemas octal y hexadecimal.

El sistema octal es el sistema de numeración en base 8 y utiliza por tanto ocho símbolos para representar las cantidades. Los símbolos utilizados son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Cada cifra octal corresponde a tres dígitos binarios.

El sistema hexadecimal es el sistema de numeración en base 16 y utiliza dieciseis símbolos para representar las cantidades. Los símbolos utilizados son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F. Cada cifra hexadecimal corresponde a 4 dígitos binarios.

Bibliografía.

Matemáticas Básicas, curso de acceso. UNED
Estructura y tecnología de Computadores I. UNED.
Análisis Matemático I. Aut: J. A. Fernández Viña
Análisis Matemático. Aut. Julio Rey Pastor, Pedro Pi, Cesar Trejo. Ed. Kapelusz
Análisis Matemático I. Aut. Jesús Fernández Novoa. Ed. UNED